1ères Maths **d'après DS 2** **samedi 20 janvier 2024**
Durée 1h30
Calculatrice autorisée en **mode examen** **Total sur 20 points**

Exercice 1 – **QCM [10 points]**

Pour chaque question, donner la (ou les) bonne(s) réponse(s) parmi **A**, **B**, **C** ou **D**.

N°	Question	A	B	C	D	
1	La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - x^2$ Le taux de variation de f entre -2 et 0 est :	2	-2	-1	1	
2	La tangente à la courbe de la fonction $f : x \longmapsto 2x^2 - 3$ au point d'abscisse 2 admet pour équation :	$y = 8x - 11$	$y = 4x + 3$	$8x - 6 - 2y = 0$	$y = 4x - 3$	
3	La tangente à la courbe d'une fonction f au point $A(-1\,;2)$ admet pour équation : $y = 3x + 5$. On peut en déduire que :	$f'(2) = 3$	$f'(-1) = 3$	$f'(-1) = 2$	L'ordonnée à l'origine de cette tangente est 5	
4	Pour tout réel x : $g'(x) = x^2 - 2x + 5$ L'expression algébrique de $g(x)$ peut être :	$g(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x - 1$	$g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 15x}{3}$	$g(x) = x^3 - x^2 + 5x + 2$	$g(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x$	
5	Pour tout réel x : $h(x) = -x^2 + x - 3$. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de h au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ vaut :	$-\frac{11}{4}$	0	-3	1	
6	Une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ a pour fonction dérivée f' définie par $f'(x) = x^2 - x$. On peut affirmer que :	f est négative sur $[0\,;1]$.	f est strictement décroissante sur $[0\,;1]$.	f' est croissante sur sur $\mathbb{R}$.	la courbe représentative de f admet une tangente horizontale en deux points	
7	La fonction $f : x \longmapsto x^4$ admet :	un minimum sur $\mathbb{R}$ en zéro	une tangente horizontale au point O	une tangente verticale au point O	un maximum sur $\mathbb{R}$ en zéro	
8	Une équation de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ est :	$y = -a^2 + 2ax$	$y = a^2 + 2ax$	$y = -a^2 + 2a(x - a)$	$y = 2a + a^2(x - a)$	

9	Pour tout $x \neq 2$, on pose : $$f(x) = \frac{x+2}{3x-6}$$ Alors, pour tout $x \neq 2$, on a :	$f'(x) = \dfrac{3x - 6 - (x+2)}{(3x-6)^2}$	$f'(x) = \dfrac{1}{3}$	$f'(x) = \dfrac{-12}{(3x-6)^2}$	$f'(x) = \dfrac{6x}{(3x-6)^2}$	
10	g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (3x+1)^2$. Alors ...	$g(0) = 1$ et $g'(0) = 6$	$g(1) = 16$ et $g'(1) = 6$	$g(-1) = 4$ et $g'(-1) = -12$	$g(2) = 49$ et $g'(2) = 42$	

<u>Exercice 2</u> [10 points] – Parabole, tangente et aire minimale

<u>Partie A</u>

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{(1+x^2)^2}{4x}$$

1. Montrer que, pour tout réel x, on a : $3x^4 + 2x^2 - 1 = (x^2+1)(3x^2-1)$.

2. Vérifier que pour tout $x \neq 0$, on a :

$$g'(x) = \frac{(x^2+1)(3x^2-1)}{4x^2}$$

3. Établir le tableau de signes de $g'(x)$.

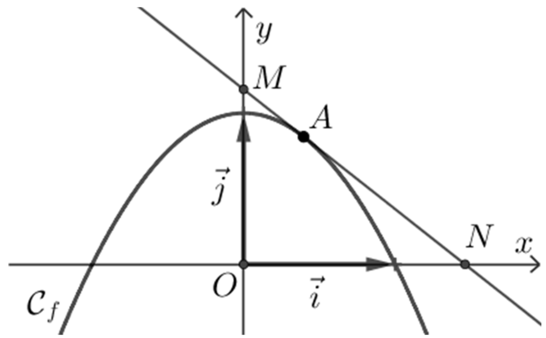
<u>Partie B</u>

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x^2$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

A est un point de C_f d'abscisse a telle que $0 < a \leqslant 1$.

La tangente à C_f au point A coupe l'axe des abscisses en N et l'axe des ordonnées en M.

Quelle doit être la valeur de a afin que l'aire du triangle OMN soit minimale ?



Corrigé
Exercice 1

	Question	A	B	C	D	
1	La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - x^2$. Le taux de variation de f entre -2 et 0 est :	2	-2	-1	1	**A**
2	La tangente à la courbe de la fonction $f : x \longmapsto 2x^2 - 3$ au point d'abscisse 2 admet pour équation :	$y = 8x - 11$	$y = 4x + 3$	$8x - 6 - 2y = 0$	$y = 4x - 3$	**A**
3	La tangente à la courbe d'une fonction f au point $A(-1\,;2)$ admet pour équation : $y = 3x + 5$. On peut en déduire que :	$f'(2) = 3$	$f'(-1) = 3$	$f'(-1) = 2$	L'ordonnée à l'origine de cette tangente est 5	**B** **D**
4	Pour tout réel x : $g'(x) = x^2 - 2x + 5$ L'expression algébrique de $g(x)$ peut être :	$g(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x - 1$	$g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 15x}{3}$	$g(x) = x^3 - x^2 + 5x + 2$	$g(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x$	**A** **B** **D**
5	Pour tout réel x : $h(x) = -x^2 + x - 3$ Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de h au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ vaut :	$-\frac{11}{4}$	0	-3	1	**B**
6	Une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ a pour fonction dérivée f' définie par $f'(x) = x^2 - x$. On peut affirmer que :	f est négative sur $[0\,;1]$.	f est strictement décroissante sur $[0\,;1]$	f' est croissante sur sur $\mathbb{R}$.	la courbe représentative de f admet une tangente horizontale en deux points	**B** **D**
7	La fonction $f : x \longmapsto x^4$ admet :	un minimum sur $\mathbb{R}$ en zéro	une tangente horizontale au point O	une tangente verticale au point O	un maximum sur $\mathbb{R}$ en zéro	**A** **B**

8	Une équation de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ est :	$y = -a^2 + 2ax$	$y = a^2 + 2ax$	$y = -a^2 + 2a(x-a)$	$y = 2a + a^2(x-a)$	**A**
9	Pour tout $x \neq 2$, on pose : $f(x) = \dfrac{x+2}{3x-6}$ Alors, pour tout $x \neq 2$, on a :	$f'(x) = \dfrac{3x-6-(x+2)}{(3x-6)^2}$	$f'(x) = \dfrac{1}{3}$	$f'(x) = \dfrac{-12}{(3x-6)^2}$	$f'(x) = \dfrac{6x}{(3x-6)^2}$	**C**
10	g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (3x+1)^2$. Alors ...	$g(0) = 1$ et $g'(0) = 6$	$g(1) = 16$ et $g'(1) = 6$	$g(-1) = 4$ et $g'(-1) = -12$	$g(2) = 49$ et $g'(2) = 42$	**A C D**

Exercice 2

Partie A

Pour tout $x \neq 0$:

$$g(x) = \frac{(1+x^2)^2}{4x}$$

1. **Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, 3x^4 + 2x^2 - 1 = (x^2+1)(3x^2-1)$**

Méthode 1 (méthode « d'un membre vers l'autre »)

Développons le membre de droite de l'égalité proposée :

$$\begin{aligned}&(x^2+1)(3x^2-1)\\&= 3x^4 - x^2 + 3x^2 - 1\\&= 3x^4 + 2x^2 - 1\end{aligned}$$

On obtient finalement le membre de gauche de l'égalité proposée.

On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}, 3x^4 + 2x^2 - 1 = (x^2+1)(3x^2-1)$.

Méthode 2 (méthode « de la différence nulle »)

$$\begin{aligned}&3x^4 + 2x^2 - 1 - (x^2+1)(3x^2-1)\\&= 3x^4 + 2x^2 - 1 - (3x^4 - x^2 + 3x^2 - 1)\\&= 3x^4 + 2x^2 - 1 - (3x^4 + 2x^2 - 1)\\&= 3x^4 + 2x^2 - 1 - 3x^4 - 2x^2 + 1\\&= 0\end{aligned}$$

Pour tout réel x, on a : $3x^4 + 2x^2 - 1 - (x^2+1)(3x^2-1) = 0$

donc : $\forall x \in \mathbb{R}, 3x^4 + 2x^2 - 1 = (x^2+1)(3x^2-1)$.

2. **Vérifions que, pour tout $x \neq 0$: $g'(x) = \frac{(x^2+1)(3x^2-1)}{4x^2}$**

Méthode 1

Remarquons d'abord que, pour tout $x \neq 0$:

$$g(x) = \frac{(1+x^2)^2}{4x} = \frac{1^2 + 2(1)(x^2) + (x^2)^2}{4x} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x}$$

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$u(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ $\qquad u'(x) = 4x^3 + 4x$

$v(x) = 4x$ $\qquad v'(x) = 4$

$$g'(x) = \frac{(4x^3+4x)(4x) - 4(x^4 + 2x^2 + 1)}{(4x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{4[(4x^3+4x) \times x - (x^4 + 2x^2 + 1)]}{4x \times 4x}$$

$$g'(x) = \frac{(4x^3+4x) \times x - (x^4 + 2x^2 + 1)}{4x^2}$$

$$g'(x) = \frac{4x^4 + 4x^2 - x^4 - 2x^2 - 1}{4x^2}$$

$$g'(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 - 1}{4x^2}$$

Or, on a montré que pour tout réel x :

$$3x^4 + 2x^2 - 1 = (x^2+1)(3x^2-1)$$

donc on a bien, pour tout $x \neq 0$: $g'(x) = \frac{(x^2+1)(3x^2-1)}{4x^2}$.

Méthode 2

$$\forall x \neq 0, g(x) = \frac{(1+x^2)^2}{4x}$$

Déterminons d'abord l'expression dérivée de $N : x \mapsto (1+x^2)^2$.

Rappel : $(u^2)' = 2u \times u'$

$u(x) = 1 + x^2$ $\quad u'(x) = 2x$

$$N'(x) = 2(1+x^2) \times 2x = 4x(1+x^2)$$

Déterminons la dérivée de g :

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$u(x) = (1+x^2)^2$ $\qquad u'(x) = 4x(1+x^2)$

$v(x) = 4x$ $\qquad v'(x) = 4$

$$g'(x) = \frac{4x(1+x^2) \times 4x - 4 \times (1+x^2)^2}{(4x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{4(1+x^2)4x^2 - 4(1+x^2)(1+x^2)}{4x \times 4x}$$

$$g'(x) = \frac{4(1+x^2)4x^2 - 4(1+x^2)(1+x^2)}{4x \times 4x}$$

$$g'(x) = \frac{4(1+x^2)[4x^2-(1+x^2)]}{4\times 4x^2}$$
$$g'(x) = \frac{(1+x^2)(4x^2-1-x^2)}{4x^2}$$
$$g'(x) = \frac{(1+x^2)(3x^2-1)}{4x^2}$$

donc on a bien, pour tout $x \neq 0$: $g'(x) = \frac{(x^2+1)(3x^2-1)}{4x^2}$.

3. Établir le tableau de signes de $g'(x)$.

On a, pour tout $x \neq 0$:

$$g'(x) = \frac{(x^2+1)(3x^2-1)}{(2x)^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $g'(x)$ est celui de son numérateur : $(x^2+1)(3x^2-1)$.

Or, pour tout réel x, $x^2+1>0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $3x^2-1$. On a :

$$3x^2-1=0 \Leftrightarrow 3x^2=1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{1}{3}} \;\; ou\; x=-\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Remarquons que :

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

donc :

$$3x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3} \;\; ou \;\; x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

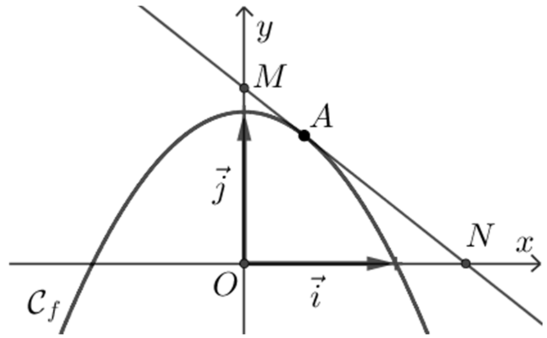
Règle : « ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur de ses racines ».

On obtient finalement le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Partie B

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=1-x^2$, $A\in\mathcal{C}_f$, $x_A=a$ avec $0<a\leqslant 1$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en A coupe l'axe des abscisses en N et l'axe des ordonnées en M : quelle doit être la valeur de a afin que l'aire du triangle OMN soit minimale ?



Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=1-x^2$ donc : $f'(x)=-2x$, d'où $f'(a)=-2a$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a;\dots)\in\mathcal{C}_f$ admet pour équation :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)\;(cours)$$
$$y=-2a(x-a)+1-a^2$$
$$y=-2ax+2a^2+1-a^2$$
$$y=-2ax+a^2+1$$

• si $x=0$, alors : $y=y_M=-2a(0)+a^2+1=a^2+1$.

• si $y=0$, alors : $2ax_N=a^2+1$ donc : $x_N=\frac{a^2+1}{2a}$ $(a\neq 0)$

On a donc : $M(0;a^2+1)$ et $N\left(\frac{a^2+1}{2a};0\right)$.

On a :

$$\mathcal{A}_{OMN}=\frac{OM\times ON}{2}=\frac{(a^2+1)\times\frac{a^2+1}{2a}}{2}=\frac{\frac{(a^2+1)\times(a^2+1)}{2a}}{\frac{2}{1}}$$
$$=\frac{(a^2+1)^2}{2a}\times\frac{1}{2}=\frac{(a^2+1)^2}{4a}=g(a)$$

L'aire du triangle OMN est donc minimale lorsque $g(a)$ est minimal.

Le signe de $g'(x)$ donne le sens de variation de g, donc il résulte du tableau de signes de $g'(x)$ que :

$$g \searrow \ sur \left]0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \text{ et } g \nearrow \ sur \left[\frac{\sqrt{3}}{3};1\right]$$

donc g admet un minimum sur $]0;1]$, atteint en $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (uniquement).

Conclusion : **l'aire de $\boldsymbol{OMN}$ est minimale lorsque $\boldsymbol{a = \frac{\sqrt{3}}{3}}$**.

<u>Complément</u>

Cette aire minimale est :

$$g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\left(1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)^2}{4\times\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{16}{9}\times\frac{3}{4\sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3\times 3} = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{9}}$$